Introduction aux Maths Condensées

Marco Artusa

28 Fevrier 2022

1 Introduction

Aujourd'hui on va répondre à la question suivante: qu'est-ce que les mathématiques condensées? Les maths condensées sont une nouvelle théorie actuellement en développement par Dustin Clausen et Peter Scholze. Il s'agit d'une nouvelle façon de considérer les espaces topologiques.

Les espaces topologiques sont des objets fondamentaux en mathématiques, et ils peuvent être modèles pour des types différents des objets mathématiques: d'abord, les objets physiquement étendus; ensuite, lorsqu'ils sont considérés module homotopie, ils deviennent des modèles d'autres objets mathématiques appelés "types d'homotopie". Ce derniers objets vivent dans le monde des infini catégories. Dans ce group de travail, on considérera les espaces topologiques comme modèles des objets physiquement étendus: ils forment une catégorie où les morphismes sont les fonctions continues.

Cependant, en mathématiques classiques, un problème majeur est associé à cette catégorie, qui est rendu explicite par la question suivante:

Comment faire de l'algèbre avec des espaces topologiques ?

En effet, il n'est pas toujours claire comment faire de l'algèbre quand les groupes, les groupes abéliens ou les espaces vectoriels avec le quels on travaille ont une topologie (e.g. $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{R}$, $GL(-)$, les algèbres de Banach, ...). Avec ces objets la façon habituelle de faire de l'algèbre ne fonctionne pas toujours. On va faire quelques exemples:

1. La catégorie des espaces topologiques abéliens n'est pas une catégorie abélienne. Pour voir cela, considérons le morphisme suivante (qui est l'identité sur les ensembles sous-jacents)

$$(\mathbb{R}, \text{discret}) \to (\mathbb{R}, \text{euclidien})$$

   Il s'agit d'un monomorphisme et d'un epimorphisme dans la catégorie cité ci-dessus, mais il n'est pas carrément un isomorphisme. Donc on veut avoir une nouvelle façon de voir ce morphisme, en retrouvant un noyaux ou un conoyaux.

2. La cohomologie des groupes topologiques. Si on a un groupe topologique G qui agit sur un groupe abélien topologique M, classiquement on peut définir $\mathrm{H}^i_{\text{cont}}(G, M)$ calculés explicitement par le complexe de cochaines suivant

$$\text{Cont}(*, M) \to \text{Cont}(G, M) \to \text{Cont}(G \times G, M) \to \text{Cont}(G \times G \times G, M) \to \dots$$

   où $d^i : \text{Cont}(G^i, M) \to \text{Cont}(G^{i+1}, M)$ sont bien explicités. Le problème est que pour utiliser les techniques de l'algèbre homologique, on a besoin des résultats comme le lemme du serpent associé aux théories cohomologiques. Par contre, avec ce définition, une suite exacte courte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

   ne donne pas une suite exacte de cohomologie des groupes.

3. Le changement de base en géométrie analytique. Dans le contexte de géométrie analytique sur quelque corps topologique K, on voudrait construire une théorie des faisceaux quasi-cohérents. Toutefois, on trouve des problèmes. Par exemple, si $A \to B$ est une morphisme de K-algèbres topologiques et M est un K-module topologique, on voudrait former un changement de base $M \hat{\otimes}_A B$, mais ce n'est pas claire comment compléter.

Ces problèmes dérivent de la définition classique des espaces topologiques, qui se mélange pas bien avec l'algèbre. C'est pour ça que on va les remplacer avec des nouveaux objets appelés ensembles condensés.

Dans cette exposé on va donner les définitions primordiales de les maths condensées et on va donner les idées principaux pour résoudre les problèmes dont on a parle ci-dessus.

2 Ensembles Condensées

Définition 2.1 (Le site proétale d'un point)**.** Le site proétale d'un point $*_{\text{proét}}$ est donné par:

1. La catégorie des espaces profinis[1] comme sous-catégorie des espaces topologiques (c'est-à-dire les morphismes de ce catégorie sont les morphismes continues). On appelle **PF** ce catégorie.

2. Pour chaque S profini, une ensemble $\mathrm{Cov}(S)$ de familles de "recouvrements" de S, i.e. familles de morphismes de **PF** avec but S definis par

$$\mathrm{Cov}(S) = \{\{S_i \to S\}_{i=1}^n \mid \text{le morphisme continu induit } \sqcup_{i=1}^n S_i \to S \text{ est surjectif}\}$$

Définition 2.2 (Ensemble condensé)**.** Un ensemble condensé est un faisceaux sur le site proétale $*_{\text{proét}}$, c'est à dire un foncteur

$$T : \{\text{espaces profinis}\}^{op} \to \{\text{ensembles}\}$$

qui respecte la topologie des "recouvrements", i.e. tel que

i) Pour tous S_1, S_2 espaces profinis, le morphisme naturel

$$T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$$

est un isomorphisme.

ii) Pour tout $S' \twoheadrightarrow S$ morphisme surjectif des espaces profinis avec produit fibré $S' \times_S S'$ et le deux projections p_1, p_2 sur S', le morphisme naturel

$$T(S) \longrightarrow \mathrm{eq}\big(T(S') \rightrightarrows T(S' \times_S S')\big) = \{x \in T(S') \,|\, T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

est un isomorphisme.

Remarque 2.3. On peut définir les groupes condensés, groupes abéliens condensés, anneaux condensés comme faisceaux des groupes/groupes abéliens/anneaux/... sur le site proétale, i.e. en remplaçant le rôle de {ensembles} avec {groupes/groupes abéliens/anneaux/...}.

Ci-dessus on a donné la définition formel d'ensemble condensé, mais on va maintenant répondre à la question suivant:

Comment penser à un ensemble condensé?

Pour penser à un ensemble condensé T, il faut considérer $T(*)$ comme ensemble sous-jacent et, pour tout S espace profini, $T(S)$ comme "fonctions continues $S \to T$". Cette interprétation est justifié par l'exemple suivante, qui est le passage clé des structures topologiques aux structures condensées.

[1] Un espace profini S est la limite cofiltrée $\varprojlim_i S_i$ des espaces topologiques S_i finis discrèts, ou de façon équivalente un espace topologique compact Hausdorff et totalement discontinu. Des exemples sont l'espace topologique $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n$ ou $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le compactifié de Alexandrov de $\mathbb{N}$.

Exemple 2.4 (Ensemble condensé associé à un espace topologique)**.** Si X est un espace topologique, on peut considérer le foncteur

$$\underline{X} : \{\text{espaces profinis}\}^{op} \to \{\text{ensembles}\}, \qquad S \mapsto \underline{X}(S) := \mathrm{Cont}(S, X)$$

Pour montrer que $\underline{X}$ est en effet un ensemble condensé, il faut verifier i),ii) du définition 2.2. C'est carrément vrai que $\mathrm{Cont}(S_1 \sqcup S_2, X) = \mathrm{Cont}(S_1, X) \times \mathrm{Cont}(S_2, X)$, donc i) est vérifié. Pour ii), il faut observer que tout morphisme surjective $S' \twoheadrightarrow S$ des espaces profinis (plus généralement des espaces compact Hausdorff) est un morphisme quotient.

Remarque 2.5.

1. L'ensemble sous-jacent $\underline{X}(*) = \mathrm{Cont}(*, X)$ de $\underline{X}$ est aussi l'ensemble sous-jacent à l'espace topologique X.
2. Si X est un groupe topologique/groupe abélien topologique/anneau topologique/..., pour tout S profini $\mathrm{Cont}(S, X)$ a une structure canonique de groupe/groupe abélien/anneau/..., ainsi que $\underline{X}$ est en fait un groupe condensé/groupe abélien condensé/anneau condensé/...

On peut aussi définir la catégorie[1] des ensembles/groupes/... condensés, comme catégorie des faisceaux sur le site proétale, i.e. comme sous-catégorie de $\mathrm{Fun}(\{\text{espaces profinis}\}^{op}, \{\text{ensembles}\})$. En ce moyenne, on peut voire $X \mapsto \underline{X}$ de manière fonctorielle.

Proposition 2.6. *Le foncteur*

$$\underline{(-)} : \{\textit{espaces topologiques}\} \to \{\textit{ensembles condensés}\}, \qquad X \mapsto \underline{X}$$

est plein et fidèle sur les espaces compactement engendrés[2]*, i.e. on peut voir naturellement*

$$\{\textit{espaces compactement engendrés}\} \hookrightarrow \{\textit{ensembles condensés}\}$$

En plus ce foncteur admet un adjoint à gauche.

Comme $\underline{(-)}$ est un adjoint à droite, il respecte les limites quelconques, en particulier les produits: donc la proposition précèdent peut être reformulé pour groupes topologiques/groupes abéliens topologiques/... avec image dans groupes condensés/groupes abéliens condensés/.... En particulier on a

$$\begin{tikzcd}
\{\text{espaces compactement engendrés}\} \arrow[r, hook] & \{\text{ensembles condensés}\} \\
\{\text{groupes abeliéns compactement engendrés}\} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \{\text{groupes abéliens condensés}\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.7. {groupes abéliens condensés} est une catégorie abélienne, car il s'agit d'une catégorie des faisceaux abéliens (comme dans le cas de faisceaux sur espaces topologiques, les faisceaux abéliens forment une catégorie abélienne). En fait, on prouvera de manière indépendant ce résultat, car ce catégorie a des propriétés beaucoup plus intéressants que les autres catégories des faisceaux abéliens.

On a maintenant une catégorie abélienne où immerger les "bons" espaces topologiques abéliens. Donc il est possible résoudre le problème 1 dont on a parlé au début.

Si on dénote $\mathbb{R}^\delta$ et $\mathbb{R}$ les espaces topologiques des nombres réels avec la topologie discrète et avec la topologie euclidienne respectivement, on considère le morphisme

$$\mathrm{id} : \mathbb{R}^\delta \to \mathbb{R}$$

[1] Pour faire ça, on a des problèmes "set-theoretic". On montrera comment les résoudre dans les prochains exposées, mais pour l'instant on va les ignorer.

[2] Un espace compactement engrendré est un espace X tel que une partie F de X est fermée si est seulement si pour toute fonction continue $f : K \to X$ où K est compact, $f^{-1}(F)$ est fermée. On peut penser que tout espace topologique "bon" est compactement engendré: exemples des espaces compactement engendrés sont les espaces localement compacts, les espaces métrisables, les CW complexes, les espaces espaces à base dénombrable de voisinage.

qui est et monomorphisme et epimorphisme dans {groupes abéliens compactement engendrés} mais il n'est pas un isomorphisme. Pour résoudre ce problème, on va dans la catégorie abélienne

$$\{\text{groupes abéliens condensés}\}$$

On a donc le morphisme

$$\underline{\mathbb{R}^\delta} \to \underline{\mathbb{R}}$$

qui est toujours un monomorphisme comme $\underline{(-)}$ est adjoint à droite. Ce morphisme est donné par l'inclusion, pour tout S profini

$$\mathrm{Cont}(S, \mathbb{R}^\delta) = \mathrm{LocConst}(S, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Cont}(S, \mathbb{R}),$$

qui en général n'est pas surjectif. En effet, on montrera que le conoyaux Q de ce morphisme est un groupe abélien condensé $\neq 0$, et

$$Q(S) = \frac{\mathrm{Cont}(S, \mathbb{R})}{\mathrm{LocConst}(S, \mathbb{R})} \qquad \forall S \text{ profini}$$

Donc le fait que $\underline{\mathbb{R}^\delta} \to \underline{\mathbb{R}}$ n'est pas un isomorphisme des groupes abéliens condensés est expliqué par l'existence d'un conoyaux pas nul.

Remarque 2.8. Cet objet Q est bizarre. Si on considère le groupe abélien sous-jacent $Q(*)$ on a

$$Q(*) = \mathrm{Cont}(*, \mathbb{R})/\mathrm{LocConst}(*, \mathbb{R}) = 0,$$

mais en général $Q(S) \neq 0$, donc on peut trouver des morphismes $S \to Q$ pas nuls. En plus, si on considère $Q(S^1)$ comme[1] les morphismes continus $S^1 \to Q$, on prouvera que

$$Q(S^1) = \{\text{formes fermées de } S^1\}.$$

3 Cohomologie Condensé et Cohomologie de Faisceaux

On a vu dans la section précédent que le passage des "bons" espaces topologiques aux ensembles condensés est sans perte au niveau catégoriel. Toutefois, il faut vérifier que certains invariants classiques des espaces topologiques soient préservés, comme les groups de cohomologie.

Soit S un espace topologique (compactement engendré) et A un groupe abélien topologique (compactement engendré).

On peut définir classiquement la cohomologie de faisceaux de S avec coefficients dans A de la manière suivante. On considère le faisceaux abélien

$$A_S : \mathrm{Ouv}(S)^{op} \to \{\text{groupes abéliens}\} \qquad U \mapsto \mathrm{Cont}(U, A),$$

e on définit

$$\mathrm{H}^q_{\text{faisc}}(S, A) \coloneqq \mathrm{H}^q(S, A_S) (= R^q\Gamma(S, A_S))$$

Remarque 3.1. Si A est discret, des résultats classiques montrent que la cohomologie de faisceaux coïncide avec la cohomologie de Cech, lorsque S soit para-compact Hausdorff, et les deux coïncident avec la cohomologie singulière lorsque S soit un CW complexe.

Dans le monde condensé, on peut donner une nouvelle définition: cela de cohomologie condensé. En effet, S peut être vu comme ensemble condensé et A comme groupe abélien condensé (en considérant $\underline{S}$ et $\underline{A}$). Donc on a une notion interne de cohomologie dans {ensembles condensés}, i.e.

$$\mathrm{H}^q_{\text{cond}}(S, A) \coloneqq \mathrm{Ext}^q(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{A}),$$

calculé, lorsque S est compact, par le complexe

$$\Gamma(S_0, A) \to \Gamma(S_1, A) \to \Gamma(S_1, A) \to \dots$$

[1]On verra qu'il est sensé évaluer un ensemble condensé en quelconque espace compact, pas forcement profini.

où $S_\bullet \to S$ est une hyper-recouvrement de S avec espaces extrêmement discontinu: on va expliquer ça dans le prochain exposé.

La définition de cohomologie de faisceaux est une bonne définition et va nous donner beaucoup des invariants outils, donc on veux la préserver aussi dans le monde condense. La question est: est-il vrai que la première définition coïncide avec la deuxième?

Théorème 3.2. *La réponse est "oui" quand S est compact et*

- *A discrete (Dychoff, 1975)*
- *$A = \mathbb{R}$ avec la topologie euclidienne (Clausen-Scholze, 2019)*

4 Les autres problèmes: la cohomologie des groupes topologiques et la complétion

Dans le monde condensé, on retrouve une manière naturel de considérer un groupe condensé G qui agit sur un groupe abélien condensé A (i.e. pour tout S profini $G(S)$ agit sur $A(S)$ de manière fonctoriëlle), donc c'est possible définir pour tout q la cohomologie de groupe

$$\mathrm{H}^q(G, A)$$

comme un groupe abélien condensé.

Remarque 4.1. Si G est représenté par un groupe topologique et A est représenté par un groupe abélien topologique, la définition $\mathrm{H}^q(G, A)$ coïncide avec $\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}(G, A)$ dans beaucoup des cas d'interes. En tout cas (même si il ne coïncide pas avec $\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}$), une suite exact courte des groupes abéliens condensés avec une action de G

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

donne une suite exacte long en cohomologie.

On arrive au dernier problème: celui de la complétion. La catégorie des groupes abéliens condensés est une catégorie abélienne avec une structure monoidale donné par un produit tensoriel $\otimes$. Donc on a des objects comme $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_l$ et $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}[[T]]$: pour quelque raison que on verra dans les prochains exposé, ces objets ne donnent pas la juste réponse, et ils ont besoin d'être complétés. Il faut donc définir un produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ de manière que les objets $\mathbb{Z}_p \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l$, $\mathbb{Z}_p \hat{\otimes} \mathbb{Z}[[T]]$ soient sensés. C'est ce qui on va faire:

- Définir ce que veut dire pour un groupe abélien condensé être complet.
- Montrer que les groupes abéliens condensés complets sont une sous-catégorie abéliènne des groupes abéliens condensés, fermé par limites et colimites.
- Montrer qu'il existe un foncteur de complètement et on peut définir $\hat{\otimes}$.
- Observer que $\mathbb{Z}_p \hat{\otimes} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l = 0$, $\mathbb{Z}_p \hat{\otimes} \mathbb{Z}[[T]] = \mathbb{Z}_p[[T]]$.

References

[CMM] GeoTopCPH, Dustin Clausen, and Peter Scholze. *Condensed Mathematics Masterclass, Playlist.* Youtube. 2020. URL: `https://www.youtube.com/playlist?list=PLAMniZX5MiiLXPrD4mpZ-O9oiwhev-5Uq`.

[LCM] Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics.* 2019. URL: `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`.