Exposé 1: les ensembles condensés

Marco Artusa

7 Mars 2022

Dans cet exposé, on va définir les ensembles condensés et on va analyser quelques propriétés importants. Pour faire ça, on a besoin de faire des rappels topologiques.

1 Rappels topologiques

Dans ce section on va étudier des sous-catégories de la catégorie **Top** des espace topologiques, qui vont être très utiles dans les maths condensés.

- La catégorie $\mathbf{Top}^c$ des espaces compact Hausdorff.
- La catégorie $\mathbf{Top}^{pf}$ des espaces profinis.
- La catégorie $\mathbf{Top}^{ed}$ des espaces compact Hausdorff extrêmement discontinu.
- La catégorie $\mathbf{Top}^{cg}$ des espaces compactement engendrés.

En fait, $\mathbf{Top}^c, \mathbf{Top}^{pf}, \mathbf{Top}^{ed}$ serons utilisés pour construire des sites de Grothendieck, et les faisceaux sur ces sites serons les ensembles condensés. Après, on veut que la catégorie des ensembles condensés contienne les "bons" espaces topologiques, qui sont bien décrits par $\mathbf{Top}^{cg}$. On considérera ces catégories comme sous-catégories pleinement fidèles de **Top**, donc chaque fois qu'on parlera de *morphisme* entre objectes d'un de ces catégories, on entendra fonctions continues.

La catégorie $\mathbf{Top}^c$ a des propriétés favorables qui ne sont pas présentes dans **Top**.

(1) Tout morphisme dans $\mathbf{Top}^c$ est une fonction continue fermé.

(2) Toute bijection continue de $\mathbf{Top}^c$ est un isomorphisme.

(3) Pour toute fonction continue surjective $S' \to S$ dans $\mathbf{Top}^c$, S a la topologie du quotient.

(4) Les epimorphismes de $\mathbf{Top}^c$ sont exactement les fonctions continues surjectives[1].

Une autre propriété est donné par le théorème de Tychonov.

Théorème 1.1 (Tychonov)**.** *La catégorie $\mathbf{Top}^c$ est stable par produits.*

Remarque 1.2. Le théorème de Tychonov (équivalent à l'axiome de la choix) dit que le produit des espaces compacts est compact. Le fait que le produit des espaces Hausdorff est Hausdorff est une conséquence immédiate de la définition de topologie produit.

De plus, pour toute couple de fonctions continues $f_1, f_2 : S' \to S$ dans $\mathbf{Top}^c$, on a

$$\mathrm{eq}(f_1, f_2) = ((f_1, f_2))^{-1}(\Delta) \subset S'$$

est compact Hausdorff comme il est fermé dans S'. Ça implique que

Proposition 1.3. *La catégorie $\mathbf{Top}^c$ est stable par limites.*

[1] Ce propriété est vraie aussi dans **Top**, mais pas dans $\mathbf{Top}^{Haus}$: en effet dans $\mathbf{Top}^{Haus}$ les epimorphismes sont le fonctions continues avec image dense

On parle maintenant de $\mathbf{Top}^{pf}$.

Définition 1.4. Un espace profini est un espace topologique qui est isomorphe à la limite cofiltré des espaces topologiques finis et discrets.

Remarque 1.5. De façon équivalente, un espace profini est un espace compact Hausdorff totalement discontinu (la preuve est un cas particulier de la dualité de Stone pour "algèbres de Boole", [Joh82]). En gros, il est possible de voir chaque espace compact Hausdorff totalement discontinu comme limite cofiltrée de ses quotients finis.

Ce remarque implique aussi que $\mathbf{Top}^{pf}$ est stable par limites: en effet, produit des compact Hausdorff totalement discontinu est compact Hausdorff totalement discontinu. En plus, l'égalisateur de $f_1, f_2 : S' \to S$ est fermé dans S', donc il est compact Hausdorff totalement discontinu si S' est compact Hausdorff totalement discontinu.

Exemple 1.6. Exemples des objectes de $\mathbf{Top}^{pf}$ sont: $\mathbb{Z}_p, \mathrm{Gal}(\overline{k}, k)$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{N}$, i.e. $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, où les ouverts sont les sous-ensembles quelconques de $\mathbb{N}$ et les sous-ensembles de $\hat{\mathbb{N}}$ qui contiennent ∞ et qui ont un complément fini.

Définition 1.7. Un espace extrêmement discontinu est un espace topologique S tel que la clôture de chaque sous-ensemble ouvert est ouvert.

Lemme 1.8. *Si X est Hausdorff et extrêmement discontinu, X est totalement discontinu.*

Preuve. $y \neq x$, on veut montrer que $y \notin \{x\}^\gamma$ (i.e. la composante connexe de x). Donc il faut trouver un sous-ensemble ouvert fermé $C_y \subset X$ tel que $x \in C_y$ mais $y \notin C_y$. Comme X est Hausdorff on a U_x, U_y disjoints. $C_y := \overline{U_x}$ est ouvert (comme X est extrêmement discontinu) et fermé, $x \in C_y$ et $y \notin C_y$. $\square$

Ça implique, en utilisant remarque 1.5 que les espaces compact Hausdorff extrêmement discontinu sont en particulier des espaces profinis.

Gleason ([Gle58]) a montré que ces objectes sont les "éléments projectifs" dans la catégorie $\mathbf{Top}^c$. Ça arrive de la proposition suivante, que on ne prouvera pas.

Proposition 1.9. *Soit S un espace topologique compact Hausdorff. Les conditions suivantes sont équivalents*

(1) S est extrêmement discontinu.

(2) Toute fonction surjective continue $S' \twoheadrightarrow S$ avec S' compact Hausdorff a une section continue.

(3) Le foncteur $\mathrm{Cont}(S, -) : \boldsymbol{Top}^c \to \boldsymbol{Set}$ envoie epimorphismes en epimorphismes.

Depuis ce moment, on dénote par $\mathbf{Top}^{ed}$ la catégorie des espaces topologiques compact Hausdorff extrêmement discontinus. Chaque fois que on dira extrêmement discontinu, on entendra aussi compact Hausdorff.

Pour donner des exemples on considère l'adjonction suivante. L'inclusion $\mathbf{Top}^c \to \mathbf{Top}$ commute avec les limites quelconques, donc il est possible de définir $\beta : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^c$ un adjoint à gauche, qui est appelé compactification de Stone-Cech. Pour un espace topologique X, βX est l'ensemble des *ultrafiltres* de X: une base pour la topologie de βX est donné par $\{\{p \in \beta X | A \in p\}_{A \subset X}\}$. Donc $\beta X \subset P(P(X))$ et $|\beta X| \leq 2^{2^{|X|}}$. Il est possible aussi de définir βX avec la proprieté universel, c'est à dire βX est un espace topologique compact Hausdorff avec un morphisme $X \to \beta X$ tel que pour tout morphisme $X \to K$ où K est compact, il est possible de l'étendre de manière unique à βX.

Proposition 1.10. *Si X est discret, βX est extrêmement discontinu.*

Preuve. On utilise la condition (2) de proposition 1.9. On considère un morphisme surjectif $S \twoheadrightarrow \beta X$ avec S compact Hausdorff. Comme X est un sous-espace discret de βX on a un soulèvement

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \arrow[dl, dotted] \\ S \arrow[r, two heads] & \beta X \end{tikzcd}$$

Comme β est adjoint à gauche à l'inclusion $\mathbf{Top}^c \subset \mathbf{Top}$, si on applique β a ce diagram, on obtient

$$\begin{tikzcd} & \beta X \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "="] \\ S = \beta S \arrow[r, two heads] & \beta^2 X = \beta X \end{tikzcd}$$

donc $S \twoheadrightarrow \beta X$ a une section. □

Remarque 1.11 ([LCM],[Gle58])**.** Être extrêmement discontinu est une propriété beaucoup plus forte que être totalement discontinu, et c'est compliqué trouver des exemples qui ne soient pas des compactifié de Stone-Cech (en effet, tout espace extrêmement discontinu est le rétract d'un compactifié de Stone-Cech). En plus, $\mathbf{Top}^{ed}$ n'est pas stable par limites: donné deux espace infinis et extrêmement discontinus, le produit $S \times S'$ n'est jamais extrêmement discontinu. En plus, si S est extrêmement discontinu et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de S qui converge, ce suite est stationnaire (donc $\mathbb{Z}_p$ n'est pas extrêmement discontinu).

Définition 1.12. Un espace topologique X est compactement engendré si un morphisme $f : X \to Y$ est continu lorsque la composition $S \to X \to Y$ est continu pour tout S compact Hausdorff qui ont un morphisme sur X.

De façon équivalente, un espace X est compactement engendré s'il a la topologie quotient pour le morphisme[1]

$$\bigsqcup_{\substack{S\to X \\ S\in\mathbf{Top}^c}} S \to X$$

Exemple 1.13. Tout espace à base de voisinage dénombrable est compactement engendré.

Preuve. On considère $V \subset X$ tel que pour tout $S \in \mathbf{Top}^c$ et tout morphisme $S \to X$, la pré-image de V est fermé. On doit prouver que V est lui-même fermé. On prend $x \in \overline{V}$ et $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base de voisinage dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in U_n \cap V$. On définit un morphisme

$$f : \hat{\mathbb{N}} \to X \qquad n \mapsto x_n,\ \infty \mapsto x.$$

$\hat{\mathbb{N}}$ est compact e f est continu ($f^{-1}(U_n) = \{n, n+1, \dots\} \cup \{\infty\}$ est ouvert pour tout n). Donc $f^{-1}(V)$ est fermé, et comme $x_n = f(n) \in V$ pour tout n, on a

$$\mathbb{N} \subset f^{-1}(V) \subset \hat{\mathbb{N}}$$

$f^{-1}(V)$ est fermé, donc $\infty \in f^{-1}(V)$ et $x \in V$. □

L'inclusion $\mathbf{Top}^{cg} \subset \mathbf{Top}$ a un adjoint à droite

$$(-)^{cg} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^{cg}$$

tel que pour tout X espace topologique, X^{cg} a le même ensemble sous-jacente que X, mais il a la topologie quotient pour le morphisme[2]

$$\bigsqcup_{\substack{S\to X \\ S\in\mathbf{Top}^c}} S \to X$$

Comme X^{cg} a la topologie quotient, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\substack{S\to X \\ S\in\mathbf{Top}^c}} S \arrow[r] \arrow[d] & X \\ X^{cg} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

[1]Cette équivalence est sensé seulement si les espaces compactes ont une cardinalité borné, sinon l'union disjoint n'est pas bien défini: après on parlera des espaces κ-compactement engendrés.

[2]Comme avant, il faut définir le foncteur $(-)^{\kappa-cg} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^{cg}_{\kappa}$, sinon l'union disjoint n'est pas sensé.

où le morphisme $X^{cg} \to X$ est la counité de l'adjonction et il est l'identité sur les ensembles sous-jacents.

On peut rendre la définition des espace compactement engendrés "plus légère" grâce à ce résultat.

Proposition 1.14. *Tout $S \in$ **Top**^{c} admet un epimorphisme d'un espace extrêmement discontinu (avec cardinalité $\leq 2^{2^{|S|}}$).*

Preuve. On considère S^δ, l'ensemble sous-jacent à S avec la topologie discrète. Donc on a un morphisme continu $S^\delta \to S$, identité sur les ensembles sous-jacents. On considère maintenant βS^δ, et donc on étend $S^\delta \to S$ à $\beta S^\delta \to S$ pour les propriétés de l'adjonction. Ce morphisme $\beta S^\delta \to S$ est surjectif car $S^\delta \to S$ est surjectif. Comme βS^δ est extrêmement discontinu (proposition 1.10) et $|\beta(S^\delta)| \leq 2^{2^{|S|}}$, on a terminé. □

Ce proposition nous dit que $\mathbf{Top}^c$ a assez de projectifs, et aussi que dans le définition des espaces compactement engendrés, ou dans le définition du foncteur $(-)^{cg}$, on peut remplacer le rôle de $\mathbf{Top}^c$ avec $\mathbf{Top}^{pf}$ ou $\mathbf{Top}^{ed}$.

2 Ensembles κ-Condensés

On a déjà dit, pendant le dernier exposé, que la catégorie des "bons" espaces topologiques (c'est-à-dire $\mathbf{Top}^{cg}$) peut être remplacé par la catégorie des ensembles condensés, que on a défini comme faisceaux sur le site proétale $*_{\text{proét}}$. Toutefois on a des problèmes de théorie des ensembles, parce que la catégorie $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ doit être une sous-catégorie pleine et fidèle de $\mathrm{Fun}((\mathbf{Top}^{pf})^{op}, \mathbf{Set})$, qui n'est pas une catégorie s'il n'y a pas de borne à la cardinalité des espaces profinis (les Hom de $\mathrm{Fun}((\mathbf{Top}^{pf})^{op}, \mathbf{Set})$ ne sont pas des ensembles).

Pour cette raison, on va borner les espaces topologique qu'on utilise par un cardinal κ, et on va construire la théorie des κ-ensembles condensés, avec κ fixé. Dans les prochains exposés on verra comment rendre la théorie indépendant de κ.

Définition 2.1. κ est un cardinale fortement limite non dénombrable si

- κ est un cardinale non dénombrable.
- $\forall \lambda < \kappa$, alors $2^\lambda < \kappa$.

Remarque 2.2. Si on ajoute la condition "κ n'est pas la somme de moins de κ cardinales plus petits que κ" on a la définition des cardinales fortement inaccessibles, qui correspondent aux univers de Grothendieck.

Exemple 2.3. On definit $\beth_\alpha$ inductivement pour tous ordinels α par

$$\beth_0 := \aleph_0, \quad \beth_{\alpha^+} := 2^{\beth_\alpha}$$

et pour les ordinales limites on définit $\beth_\alpha$ comme l'union des plus petits $\beth_\lambda$. Donc pour tout ordinale limite α, le cardinal $\kappa = \beth_\alpha$ est un cardinale fortement limite non dénombrable.

On fixe tel κ et on appelle κ-espace un espace topologique avec cardinalité borné par κ. On appelle $\mathbf{Top}^c_\kappa, \mathbf{Top}^{pf}_\kappa, \ldots$ les intersections de $\mathbf{Top}^c, \mathbf{Top}^{pf}, \ldots$ avec la catégorie $\mathbf{Top}_\kappa$ des κ-espaces.

On observe que si κ est cardinale fortement limite non dénombrable, le foncteur $\beta : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^c$ nous donne un foncteur $\mathbf{Top}_k \to \mathbf{Top}^c_\kappa$, car βX est défini comme sous-ensemble de $P(P(X))$. Avec ce remarque on peut observer que tous le résultats de la sections précédent ont une variante κ-théorétique.

Définition 2.4 (Site κ-proétale d'un point)**.** Le site $*_{\kappa-\text{proét}}$ d'un point est donné par la catégorie $\mathbf{Top}^{pf}_\kappa$, avec familles finies $\{S_i \to S\}_{i=1}^n$ des morphismes t.q. $\sqcup_{i=1}^n S_i \to S$ est surjectif comme recouvrements.

Définition 2.5 (Ensemble κ-Condensé)**.** Un ensemble κ-condensé est un faisceaux des ensembles sur $*_{\kappa-\text{proét}}$, c'est-à-dire un foncteur

$$T : (\mathbf{Top}^{pf}_\kappa)^{op} \to \mathbf{Set}$$

tel que

1) Pour tout S_1, S_2 κ-profinis, $T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$ est un isomorphisme.

2) Pour tout morphisme surjectif de κ-espaces profinis $S' \twoheadrightarrow S$, si on dénote par $S' \times_S S'$ le produit fibré, le morphisme
$$T(S) \to \{x \in T(S') |\, T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$
est un isomorphisme.

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie ayant tous les limites finies, un objecte κ-condensé de $\mathcal{C}$ est un faisceaux sur $*_{\kappa-\text{proét}}$ à valeur dans $\mathcal{C}$.

Comme $\mathbf{Top}_\kappa^{pf}$ est une catégorie petite, on peux bien définir la catégorie $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$, ou plus généralement $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathcal{C})$, comme catégorie des faisceaux.

3 Ensembles κ-condensées et espaces topologiques

Proposition 3.1. *Pour tout espace (groupe/groupe abélien/anneau/...) topologique X, le foncteur*
$$\underline{X} : (\boldsymbol{Top}_\kappa^{pf})^{op} \to \boldsymbol{Set}(\boldsymbol{Grp}/\boldsymbol{Ab}/\boldsymbol{Rng}), \qquad S \mapsto \mathrm{Cont}(S, X)$$
est un ensemble (resp. groupe/groupe abélien/anneau/...) κ-condensé.

Preuve. C'est clair que $\mathrm{Cont}(S_1 \sqcup S_2, X) = \mathrm{Cont}(S_1, X) \times \mathrm{Cont}(S_2, X)$, donc la condition 1) est vérifiée. Pour 2), on veut montrer que pour chaque fonction continue $q : S' \to X$ qui rend le diagramme suivante commutatif,
$$\begin{tikzcd}
S' \times_S S' \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & S' \arrow[d, two heads, "p"] \arrow[ddr, "q"] & \\
S' \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[drr, "q"] & S \arrow[dr, dotted] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$
la fonction continue pointillée existe. Ça arrive du fait que on peut construir la fonction pointillée au niveau des ensembles, et après utiliser le fait que les fonctions continues surjectives entre espaces compacts Hausdorff sont des morphismes quotients, d'où la continuité de la fonction pointillée. ☐

Par contre, si on a un ensemble κ-condensé T, on veut donner une topologie à l'ensemble sous-jacent $T(*)$ de manière canonique.

Définition 3.2. On définit *topologie canonique* sur $T(*)$ comme la topologie finale sur l'ensemble des morphismes
$$S \to T(*)$$
pour tout $S \in \mathbf{Top}_\kappa^{pf}$ et pour tout $\alpha \in T(S)$ (qui est identifié, par Yoneda, avec un morphisme $\underline{S} \to T$). On dénote $T(*)_{top}$ cet espace topologique.

De façon équivalente, on dit que la topologie canonique sur $T(*)$ est la topologie quotient pour le morphisme
$$\bigsqcup_{\substack{S \in \mathbf{Top}_\kappa^{pf} \\ \alpha \in T(S)}} S \to T(*)$$

Proposition 3.3. *Le passage des espaces topologiques aux ensembles κ-condensés a les propriétés suivantes.*

1) Le foncteur $\underline{(-)} : \boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set})$ est fidèle, et pleinement fidèle sur $\boldsymbol{Top}_\kappa^{cg}$.

2) On a une adjonction $-(*)_{top} : \boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set}) \leftrightarrows \boldsymbol{Top} : \underline{(-)}$.

3) La counité de l'adjonction $\underline{X}(*)_{top} \to X$ coïncide avec la counité $X^{\kappa-cg} \to X$, et en particulier
$$\underline{X}(*)_{top} \cong X^{\kappa-cg}.$$

4) Dans 1) tout marche avec les catégories $\boldsymbol{Rng}$, $\boldsymbol{Grp}$, $\boldsymbol{Ab}$ *au lieu de* $\boldsymbol{Set}$.

Remarque 3.4. A priori l'immersion de Yoneda nous dit que $\mathbf{Top}_\kappa^{pf} \subset \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$, mais ce proposition nous dit que aussi $\mathbf{Top}_\kappa^{cg}$ est immergé.

Remarque 3.5. On peut se demander: pourquoi on prend pas $-(*)_{top}$ comme adjoint à gauche aussi pour les groupes/groupes abéliens κ-condensés? La raison la plus superficielle est que si $T \in \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Grp})/\dots$, n'est pas forcement vrai que $T(*)_{top} \in \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Grp})/\dots$ La raison la plus profonde est que le foncteur $-(*)_{top}$, comme il est adjoint à gauche, ne commute pas forcement avec les produits.

Preuve. On commence par 2). Donnés X un espace topologique et T un ensemble κ-condensé, on va construire

$$a : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})}(T, \underline{X}) \leftrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(T(*)_{top}, X) : b$$

des isomorphismes d'ensembles.

Donné une transformation naturel $\eta : T \to \underline{X}$, on veux $a(\eta) : T(*)_{top} \to X$ continu. $a(\eta)$, comme morphisme des ensembles, est juste $\eta(*) : T(*) \to \underline{X}(*) = X$. Pour montrer qu'il est continu, il suffit vérifier que pour tout $S \in \mathbf{Top}_\kappa^{pf}$ et pour tout $\alpha \in T(S)$ (correspondant par Yoneda à un morphisme des ensembles condensés $\underline{S} \to T$), le morphisme

$$S \to T(*) \to X$$

est continu. Par Yoneda, ce composition est l'image de $\alpha \in T(S)$ par le morphisme $\eta(S) : T(S) \to \underline{X}(S) = \mathrm{Cont}(S, X)$, donc il est continu.

Maintenant on construit b. Donné $f : T(*)_{top} \to X$ continu, on définit $b(f)$ de la manière suivante. Pour tout S κ-espace profini et pour tout $\alpha \in T(S)$, identifié avec un morphisme $\underline{S} \to T$, on obtient

$$S \xrightarrow{\alpha(*)} T(*) \xrightarrow{f} X$$

qui est continue comme $\alpha(*)$ est continue pour la topologie $T(*)_{top}$. Donc on peut définir

$$b(f)_S(\alpha) \coloneqq f \circ \alpha(*)$$

Ce construction est naturel en S, donc $b(f) : T \to \underline{X}$ est une transformation naturel. On peut vérifier que a et b sont un l'inverse de l'autre.

Pour 3), comme tout κ-espace compact Hausdorff admet un morphisme surjectif par un κ-espace profini, on obtient que les topologies sur $X^{\kappa-cg}$ et $\underline{X}(*)_{top}$ sont équivalents, donc la counité $\underline{X}(*)_{top} \to X$ peut être remplacé par $X^{\kappa-cg} \to X$. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si X est κ-compactement engendré.

Pour 1), on applique la counité $\underline{X}(*)_{top} \to X$, qu'est un epimorphisme, donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\underline{X}(*)_{top}, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})}(\underline{X}, \underline{Y})$$

où le première morphisme est un isomorphisme si et seulement si $X \in \mathbf{Top}_\kappa^{cg}$.

Finalement, 4) suive directement de 1), parce que les autres sont des diagrammes avec limites dans $\mathbf{Top}$ et $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$, et les limites sont preservés par $\underline{(-)}$, qui est un adjoint à droite. □

References

[Gle58] Andrew M. Gleason. "Projective topological spaces". In: *Illinois Journal of Mathematics* 2.4A (1958), pp. 482–489.

[Joh82] Peter T. Johnstone. *Stone spaces.* 1st ed. Cambridge studies in advanced mathematics 3. Cambridge University Press, 1982.

[LCM] Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics.* 2019. URL: `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`.