Exposé 2: propriétés catégorielles des ensembles et des groupes abéliens condensés

Marco Artusa

14 Mars 2022

La catégorie $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ des ensembles condensés (que pour l'instant on a défini seulement avec le borne κ) est liée à deux catégories différents: $\mathbf{Top}$, la catégorie des espaces topologiques, et $\mathbf{Set}$, la catégorie des ensembles. En fait, $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ est capable de voire les phénomènes topologiques qui passent dans $\mathbf{Top}$: ce fait est partiellement expliqué par la dernier proposition de l'exposé 1, et va être mieux traité dans le prochain exposé, où on verra la "phénoménologie des ensembles condensés".

Par contre, du point de vue catégoriel, $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ se comporte plutôt comme $\mathbf{Set}$, la catégorie des ensembles. Ce remarque veut dire que il est plus facile ajouter une structure algébrique à $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$, donc $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ est plus proche à $\mathbf{Ab}$ que à $\mathbf{Ab}(\mathbf{Top})$.

Dans cet exposé on verra les propriétés catégoriels de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ et $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$, mais avant on va dire quelque mot sur comment définir ces catégories de manière indépendant de κ. Après, on verra que les espaces extrêmement discontinus nous donnent des objets *compact projectives* de $\mathbf{Cond}_{(\kappa)}(\mathbf{Set})$ et $\mathbf{Cond}_{(\kappa)}(\mathbf{Ab})$: grâce à ça on pourrait voir ces deux catégories de manière similaire à $\mathbf{Set}$ e $\mathbf{Ab}$.

1 Une théorie que ne dépends pas du cardinal

On a défini, la dernière fois, $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ comme faisceaux sur le site $*_{\kappa-\text{proét}}$. Le site $*_{\kappa-\text{proét}}$ est donné par la catégorie $\mathbf{Top}_\kappa^{pf}$ des κ-espaces profinis, avec familles finies de morphismes conjointement surjectives comme recouvrements. L'idée à la base d'une théorie que ne dépends pas de κ est définir

$$\mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \coloneqq \bigcup_\kappa \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$$

le long des morphismes qu'il faut expliciter.

Si $\kappa < \kappa'$, on a une inclusion $i : \mathbf{Top}_\kappa^{pf} \subset \mathbf{Top}_{\kappa'}^{pf}$, qui nous donne un morphisme des sites

$$*_{\kappa'-\text{proét}} \to *_{\kappa-\text{proét}}$$

et par conséquent un morphisme de topoi

$$f : \mathbf{Cond}_{\kappa'}(\mathbf{Set}) \to \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$$

où le foncteur "pullback" est donné par

$$\begin{aligned} f^* = (-)^{\kappa \to \kappa'} : \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}) &\to \mathbf{Cond}_{\kappa'}(\mathbf{Set}) \\ T \qquad &\mapsto T^{\kappa\to\kappa'} = (S \mapsto \varinjlim_{\substack{S \to S' \\ S'\,\kappa-\text{petit}}} T(S'))^\# \end{aligned} \tag{1}$$

Ce formule est désigne de manière tel que les objets représentables $y(S)$, où $S \in \mathbf{Top}_\kappa^{pf}$, sont envoyés dans $y(i(S))$. En plus, ce foncteur est exacte, il préserve les colimites, et il est pleinement fidèle (comme $f^*f_* = \mathrm{id}$).

Donc on peut voir $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}) \subset \mathbf{Cond}_{\kappa'}(\mathbf{Set})$ et considérer[1]

$$\mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \coloneqq \varinjlim \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$$

le long de ces morphismes.

Maintenant la question est:

Qu'est-ce que on doit vérifier pour ne pas s'inquiéter?

On veut travailler avec $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ comme s'il était un topos, mais il n'est pas un topos avec ce définition (par exemple, il n'y a pas un ensemble des générateurs, mais une classe). Donc on veut travailler dans le topos $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ avec κ fixé et bien choisi. Si on a des objets de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$, on peut s'arrêter avec κ suffisamment grand, et travailler dans le topos $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$: toutefois, il faut vérifier que les opérations qu'on fait sont préservés en changeant κ.

Exemple 1.1 (Gérer les colimites et les limites)**.** Si on a un petit diagramme des ensembles condensés

$$I \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}), \quad i \mapsto T_i$$

(où $\mathrm{ob}(I)$ est un ensemble), on peut choisir κ tel que $T_i \in \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ pour tout κ. Comme $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ est un topos, toute limite et colimite existe, donc on peut:

- calculer $\mathrm{colim}_{i\in I} T_i$ dans $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$. Comme les foncteurs de changement de cardinal préservent les colimites, cet objet définit aussi la colimite dans $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$.
- calculer $\lim_{i\in I} T_i$ dans $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$: n'est pas clair pourquoi ce limite va être préservée est va donner une limite dans $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$. La réponse est que si κ est suffisamment grand (en dépendance de la taille de I), la limite indexée par I commute avec les foncteurs de changement de base definis par (1). L'idée est que si κ est suffisamment grand, la cofinalité de κ devient plus grand de $\#\mathrm{ob}(I)$, et la colimite de (1) est $\mathrm{cof}(\kappa)$-filtrée, donc commute avec toute limite $\mathrm{cof}(\kappa)$-petit, et en particulier avec $\lim_{i\in I} T_i$.

Maintenant on va voir les propriétés catégoriels de $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Ab})$, et avec ces remarques on pourra oublier κ.

2 Le théorème principal et les générateurs

La catégorie $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ des groupes abéliens condensés peut être traitée de manière similaire à la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens: ce remarque est formalisé par le théorème suivante.

Théorème 2.1. *La catégorie $\boldsymbol{Cond}(\boldsymbol{Ab})$ est abélienne et satisfait les axiomes de Grothendieck* $(AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3^*), (AB4^*)$*, i.e.*

- *toute limite* $((AB3^*))$ *et toute colimite* $((AB3))$ *existe;*
- *toute somme directe* $((AB4))$*, tout produit* $((AB4^*))$ *et toute colimite filtrée* $((AB5))$ *est exacte;*
- *pour tout J ensemble des index et pour toutes catégories filtrées I_j, $j \in J$, le morphisme naturel*

  $$\varinjlim_{(i_j\in I_j)_j} \prod_{j\in J} M_{i_j} \longrightarrow \prod_{j\in J} \varinjlim_{i_j\in I_j} M_{i_j}$$

  est un isomorphisme $((AB6))$.

En plus, $\boldsymbol{Cond}(\boldsymbol{Ab})$ est engendrée par objets projectives compactes.

[1] La colimite est en vrai une 1-colimite, comme le système de $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ est filtrée au moins des isomorphismes naturels. En plus, n'est pas clair pourquoi le système des κ soit un ensemble. En fait, on donnera une définition différent de ensemble condensé dans le prochain exposé: la catégorie des ensembles condensés que on obtiendra sera équivalente à la catégorie donnée par ce colimite, lorsque ce 1-colimite soit sensé.

Définition 2.2. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, un objet M de $\mathcal{A}$ est dit

- projectif si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ est exact.
- compact si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$ commute avec les colimites filtrées.

$\mathcal{A}$ est engendrée par objets compacts projectives si pour tout $M \in \mathcal{A}$ il existe un ensemble $\{P_i\}_{i\in I}$ des objets compacts projectives et un epimorphisme $\oplus_{i\in I} P_i \twoheadrightarrow M$.

Remarque 2.3. Si une catégorie abélienne avec toute colimite petite est engendrée par un objet compact projectif, il existe un anneau R tel que ce catégorie est isomorphe à $\mathbf{Mod}_R$.

Donc le fait que $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ est une catégorie engendré par des compact projectives nous dit que c'est pratique faire l'algèbre homologique dans ce catégorie. On ne trouve pas que un générateur comme dans $\mathbf{Mod}_R$, mais on en a beaucoup ($\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Ab})$ aura une famille de générateurs compacts projectives, $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ en aura une classe). Gleason a prouvé ([Gle58]) que les espaces topologiques extrêmement discontinus sont des générateurs projectives pour $\mathbf{Top}^c$: donc on cherche de prouver la même chose pour $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$, mais on a besoin de décrire le site qui définit les ensembles κ-condensés de manière différent.

Proposition 2.4.
$$\boldsymbol{Top}_\kappa^{ed} \subset \boldsymbol{Top}_\kappa^{pf} \subset \boldsymbol{Top}_\kappa^{c}$$
avec recouvrements "familles finies $\{S_i \to S\}_{i=1}^n$ tels que $\bigsqcup_{i=1}^n S_i \to S$ est surjectif" donnent trois sites différents, mais la même catégorie des faisceaux, c'est à dire $\boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set})$.

Preuve. On montre d'abord que $\mathrm{Sh}(\mathbf{Top}_\kappa^{pf}) \cong \mathrm{Sh}(\mathbf{Top}_\kappa^{c})$ et après que $\mathrm{Sh}(\mathbf{Top}_\kappa^{pf}) \cong \mathrm{Sh}(\mathbf{Top}_\kappa^{ed})$.

- Tout reviens à montrer que, donné un κ-espace compact Hausdorff S, on a une fonction continue surjective $S' \twoheadrightarrow S$ où $S' = \beta(S^\delta)$ est extrêmement discontinu (donc en particulier profini) et $\#S' = 2^{2^{\#S}} < \kappa$. Ça nous dit que, pour tout faisceaux T, le valeur de $T(S)$ est déterminé par les valeurs $T(S')$ et $T(S' \times_S S')$, où S' et $S' \times_S S'$ (fermé dans $S' \times S'$) sont profinis.
- Donné un κ-espace profini, on a un κ-espace extrêmement discontinu S' avec $S' \twoheadrightarrow S$ et un κ-espace extrêmement discontinu S'' avec $S'' \twoheadrightarrow S' \times_S S'$. Pour tout faisceaux T, comme $T(S' \times_S S') \to T(S'')$ est un monomorphisme, le valeur de $T(S)$ est déterminé comme égalisateur des deux morphismes $T(S') \to T(S'')$.

$\square$

La conséquence de ce résultat est que on peut utiliser les espaces extrêmement discontinus comme "briques de base", et avec eux la condition de faisceaux deviens plus simple.

Corollaire 2.5. *$\boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set})$ est la catégorie des prefaisceaux $T : (\boldsymbol{Top}_\kappa^{ed})^{op} \to \boldsymbol{Set}$ tels que $T(\emptyset) = *$ et le morphisme naturel $T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$ est un isomorphisme.*

Preuve. On doit prouver que pour tout prefaisceaux T, tout $S' \twoheadrightarrow S$ morphisme surjectif entre extrêmement discontinus, e tout morphisme surjectif $S'' \twoheadrightarrow S' \times_S S'$, où S'' est extrêmement discontinu, on a
$$T(S) \hookrightarrow \{x \in T(S') \,|\, T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S'')\}$$
est surjectif. Pour montrer ça, il suffit observer que $p : S' \twoheadrightarrow S$ et les deux morphismes $S'' \twoheadrightarrow S'$ ont une section continue. $\square$

Corollaire 2.6 (Objets compact projectives)**.** *Pour tout $S \in \boldsymbol{Top}_\kappa^{ed}$, on a*

1) Le foncteur $\Gamma(S,-) : \boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set}) \to \boldsymbol{Set}$ commute avec (les limites et) les colimites filtrées et les coégalisateurs réflexives.

2) Le foncteur $\Gamma(S,-) : \boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Ab}) \to \boldsymbol{Ab}$ commute avec (les limites et) les colimites quelconques.

Preuve. Soit $I \to \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}/\mathbf{Ab})$, $i \mapsto T_i$ une système des éléments de $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}/\mathbf{Ab})$. On peut définir le prefaisceau des ensembles/groupes abéliens sur le site des extrêmement discontinus

$$C(S) \coloneqq \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S)) \qquad \forall S \in \mathbf{Top}_\kappa^{ed}.$$

Si $C(\emptyset) = *$ et $C(S_1 \sqcup S_2) = C(S_1 \times S_2)$, C est un faisceau et il est la colimite aussi dans $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}/\mathbf{Ab})$. Donc il suffit vérifier, pour 1), que si I est filtrée ou il est un coégalisateur réflexive, C est un faisceau. Pour 2), il suffit vérifier que C est un faisceau pour tout I.

1) Dans **Set**, les colimites filtrées et le coégalisateurs réflexives commutent avec les limites finies, et aussi la colimite filtrée et le coégalisateur réflexif de l'objet final $*$ est toujours l'objet final $*$, donc si I est filtrée ou il représente un coégalisateur réflexif,

$$\mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S_1) \times T_i(S_2)) = \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S_1)) \times \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S_2)) \qquad \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(\emptyset)) = \mathrm{colim}_{i\in I} * = *$$

   c'est à dire C est un faisceau.

2) Dans **Ab**, les produits finis sont aussi des coproduits finis, et l'objet final est aussi l'objet initial, donc ils commutent avec toute colimit. Pour toute I

$$\mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S_1) \oplus T_i(S_2)) = \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S_1)) \oplus \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S_2)) \qquad \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(\emptyset)) = \mathrm{colim}_{i\in I} 0 = 0$$

   c'est à dire C est un faisceau.

□

Ce résultat est vrai aussi dans $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set}/\mathbf{Ab})$, sans κ, car en utilisant les remarques de la première section, si on fixé I et on prend κ suffisamment grand, les foncteurs $(-)^{\kappa \to \kappa'}$ de changement de cardinal préservent les colimites et les limites indexées par I.

Considérons l'adjonction $\mathbb{Z} : \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}) \leftrightarrows \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Ab}) : i$, où le foncteur $\mathbb{Z}$ associe à $T \in \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ le faisceau associé au prefaisceau $S \mapsto \mathbb{Z}[T(S)]$. Le resultat qu'on vient de prouver nous dit que pour tout S extrêmement discontinu, $\mathbb{Z}[S]$ est compact projectif[1]. En effet

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})}(\mathbb{Z}[S], -) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})}(S, -) = \Gamma(S, -) : \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$$

et il commute avec toute limite et toute colimite. Avec ce resultat on peut finalement prouver le théorème.

3 Preuve du théorème et des autres propriétés

Preuve du théorème 2.1. On preuve le théorème pour $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Ab})$. En utilisant les remarques de la première section, on peut voir que ça preuve le théorème aussi pour $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$.

En utilisant le corollaire 2.5 on peut voir $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Ab})$ comme la catégorie des foncteurs $(\mathbf{Top}_\kappa^{ed})^{op} \to \mathbf{Ab}$ qui envoient $\emptyset$ en $*$ et les unions disjoints finis en produits finis. Avec le corollaire 2.6 on a que dans ce catégorie les limites et les colimites sont calculés ponctuellement sur les extrêmement discontinus. Donc les affirmations du théorème, sauf la dernière, sont vraies parce que elles sont vraies dans **Ab**.

On a déjà observé que les $\mathbb{Z}[S]$, où S est κ-extrêmement discontinu, sont des objets compacts projectives de $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Ab})$: il faut prouver qu'ils sont des générateurs. Donné M groupe abélien κ-condensé, on veut trouver

$$\bigoplus_{S\in\mathcal{G}} \mathbb{Z}[S] \twoheadrightarrow M$$

où $\mathcal{G}$ est un ensemble des espaces κ-extrêmement discontinus. On applique le lemme de Zorn à

$$(\{N \subseteq M \,|\, N \text{ admet une surjection d'une somme directe des } \mathbb{Z}[S]\ \}, \subseteq)$$

[1]Comme les foncteurs de changement de cardinal préservent les représentables, ils préservent les $\mathbb{Z}[S]$, donc $\mathbb{Z}[S]$ est bien défini dans $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$

On obtient un sous-objet maximale $M' \subseteq M$, qui admet un epimorphisme

$$\bigoplus_{S' \in \mathcal{G}'} \mathbb{Z}[S'] \twoheadrightarrow M.$$

Supposons $M' \subsetneq M$, donc $M/M' \neq 0$. Comme les colimites sont calculé ponctuellement sur les extrêmement discontinus, il existe $S \in \mathbf{Top}_\kappa^{ed}$ tel que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], M/M') = M/M'(S) \neq 0.$$

Donc il y a un morphisme non zéro $\mathbb{Z}[S] \to M/M'$: comme $\mathbb{Z}[S]$ est projectif ce morphisme peut être relevé le long de l'epimorphisme $M \twoheadrightarrow M/M'$. On obtient donc $\mathbb{Z}[S] \to M$ tel que sa image n'est pas contenue dans M', donc

$$\bigoplus_{S' \in \mathcal{G}'} \mathbb{Z}[S'] \oplus \mathbb{Z}[S] \to M$$

est un epimorphisme sur un sou-objet de M qui contient strictement M'. On a trouvé une contradiction à la maximalité de M'. Donc $M' = M$. $\square$

On termine avec des autres propriétés de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$:

- $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ a un produit tensoriel $- \otimes -$, où

  $$M \otimes N = (S \mapsto M(S) \otimes N(S))^{\#}$$

  et on a pas besoin du faisceau associé sur les extrêmement discontinus. Donc $(\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}), \otimes, \mathbb{Z})$ est une catégorie symétrique et monoïdale, comme $(\mathbf{Cond}(\mathbf{Set}), \times, *)$: comme $\mathbb{Z}[T_1 \times T_2] = \mathbb{Z}[T_1] \otimes \mathbb{Z}[T_2]$ le foncteur $\mathbb{Z}[-] : \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ est symétrique monoïdal.

  Remarque 3.1. Pour tout $T \in \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$, le groupe abélien condensé $\mathbb{Z}[T]$ est plat. Le foncteur $(-)^{\#}$ est exacte, et au niveau de prefaisceau le produit tensoriel avec $S \mapsto \mathbb{Z}[T(S)]$ est exact, comme $\mathbb{Z}[T(S)]$ est libre (donc plat) pour tout S.

- Pour tout $M, N \in \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ on a un Hom-interne $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \in \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ défini par l'adjonction

  $$\mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}(P \otimes M, N) \qquad \forall P, M, N \in \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$$

  En particulier, avec $P = \mathbb{Z}[S]$ on a

  $$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)(S) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S] \otimes M, N) \qquad \forall S \in \mathbf{Top}^{ed}$$

  Donc le groupe abélien sous-jacente est exactement $\mathrm{Hom}(M, N)$.

- Le théorème 2.1 nous dit que $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ a assez de projectives, donc on peut construire la catégorie derivé $D(\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}))$. En plus, si P est un groupe abélien compact projectif, $P[0]$ est un objet compact de $D(\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}))$, dans le sens où $\mathrm{Hom}(P[0], -)$ commute avec les sommes directes. Ça implique que $D(\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}))$ est compactement engendré.

  En utilisant les résolutions projectives on peut définir $- \otimes^L -$ un produit tensoriel symétrique et monoidel sur $D(\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}))$, et un Hom-interne dérivé $R\underline{\mathrm{Hom}}(-, -)$. On a toujours l'adjonction

  $$\mathrm{Hom}(P, R\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}(P \otimes^L M, N).$$

References

[Gle58] Andrew M. Gleason. "Projective topological spaces". In: *Illinois Journal of Mathematics* 2.4A (1958), pp. 482–489.

[LCM] Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics*. 2019. URL: `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`.