# Exposé 3: phénoménologie des ensembles condensés

Marco Artusa

21 Mars 2022

## 1 Introduction: le passage des espaces topologiques aux ensembles $\kappa$-condensés

Pendant l'exposé 2, on a montré les propriétés catégoriels de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$, en montrant que il peut être traité de manière similaire à $\mathbf{Set}$, grace aux générateurs compact projectives, i.e. les faisceaux représentables par les espaces extrêmement discontinus. Aujourd'hui on veut montrer que par contre, du point de vu phénoménologique, la catégorie des ensembles condensés est fortement liée á la catégorie $\mathbf{Top}$ des espaces topologique.

La première chose à observer est que, pendant l'exposé 1, on a déjà vu comment passer des structures topologiques aux structures condensés. Donné un espace topologique $X$, on a défini

$$\underline{X} : \mathbf{Top}_\kappa^{pf} \to \mathbf{Set} \qquad S \mapsto \mathrm{Cont}(S, X),$$

et on a observé qu'il s'agit d'un ensemble $\kappa$-condensé. En plus, on a vu que ce association est particulièrement favorable, dans le sense que on a les propriétés suivantes.

**Proposition 1.1.** *Le passage des espaces topologiques aux ensembles $\kappa$-condensés a les propriétés suivantes.*

*1) Le foncteur $\underline{(-)} : \boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set})$ est fidèle, et pleinement fidèle sur $\boldsymbol{Top}_\kappa^{cg}$.*

*2) On a une adjonction $-(*)_{top} : \boldsymbol{Cond}_\kappa(\boldsymbol{Set}) \leftrightarrows \boldsymbol{Top} : \underline{(-)}$.*

*3) La counité de l'adjonction $\underline{X}(*)_{top} \to X$ coïncide avec la counité $X^{\kappa-cg} \to X$, et en particulier*

$$\underline{X}(*)_{top} \cong X^{\kappa-cg}.$$

*4) Dans 1), tout marche avec les catégories $\boldsymbol{Rng}, \boldsymbol{Grp}, \boldsymbol{Ab}$ au lieu de $\boldsymbol{Set}$.*

*Preuve.* On commence par 2). Donnés $X$ un espace topologique et $T$ un ensemble $\kappa$-condensé, on va construire

$$a : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})}(T, \underline{X}) \leftrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(T(*)_{top}, X) : b$$

des isomorphismes d'ensembles.

Donné une transformation naturel $\eta : T \to \underline{X}$, on veux $a(\eta) : T(*)_{top} \to X$ continu. $a(\eta)$, comme morphisme des ensembles, est juste $\eta(*) : T(*) \to \underline{X}(*) = X$. Pour montrer qu'il est continu, il suffit vérifier que pour tout $S \in \mathbf{Top}_\kappa^{pf}$ et pour tout $\alpha \in T(S)$ (correspondant par Yoneda à un morphisme des ensembles condensés $\underline{S} \to T$), le morphisme

$$S \to T(*) \to X$$

est continu. Par Yoneda, ce composition est l'image de $\alpha \in T(S)$ par le morphisme $\eta(S) : T(S) \to \underline{X}(S) = \mathrm{Cont}(S, X)$, donc il est continu.

Maintenant on construit $b$. Donné $f : T(*)_{top} \to X$ continu, on définit $b(f)$ de la manière suivante. Pour tout $S$ $\kappa$-espace profini et pour tout $\alpha \in T(S)$, identifié avec un morphisme $\underline{S} \to T$, on obtient

$$S \xrightarrow{\alpha(*)} T(*) \xrightarrow{f} X$$

qui est continue comme $\alpha(*)$ est continue pour la topologie $T(*)_{top}$. Donc on peut définir

$$b(f)_S(\alpha) := f \circ \alpha(*)$$

Ce construction est naturel en $S$, donc $b(f) : T \to \underline{X}$ est une transformation naturel. On peut vérifier que $a$ et $b$ sont un l'inverse de l'autre.

Pour 3), comme tout $\kappa$-espace compact Hausdorff admet un morphisme surjectif par un $\kappa$-espace profini, on obtient que les topologies sur $X^{\kappa-cg}$ et $\underline{X}(*)_{top}$ sont équivalents, donc la counité $\underline{X}(*)_{top} \to X$ peut être remplacé par $X^{\kappa-cg} \to X$. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si $X$ est $\kappa$-compactement engendré.

Pour 1), on applique la counité $\underline{X}(*)_{top} \to X$, qu'est un epimorphisme, donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\underline{X}(*)_{top}, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})}(\underline{X}, \underline{Y})$$

où le première morphisme est un isomorphisme si et seulement si $X \in \mathbf{Top}_\kappa^{cg}$.

Finalement, 4) suive directement de 1), parce que les autres sont des diagrammes avec limites dans **Top** et $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$, et les limites sont preservés par $\underline{(-)}$, qui est un adjoint à droite. □

Toutefois, n'est pas clair pourquoi $\underline{(-)} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$, c'est à dire que n'est pas clair pourquoi ce foncteur bien se tient avec les foncteur de changement de cardinal qu'on a défini la dernière fois. On va donc rappeler la définition des ensembles condensés et de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ qu'on a donné pendant le dernier exposé, et on va résoudre ce problème en ajoutant une condition sur l'espace topologique $X$.

## 2 Se débarrasser du cardinal

**Définition 2.1.** Si $\kappa' > \kappa$ sont des cardinales fortement limite non dénombrables, on a un foncteur de changement de cardinal $(-)^{\kappa \to \kappa'}$

$$\begin{aligned} (-)^{\kappa\to\kappa'} : \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set}) &\to \mathbf{Cond}_{\kappa'}(\mathbf{Set}) \\ T \quad &\mapsto T^{\kappa\to\kappa'} = (S \mapsto \varinjlim_{\substack{S \to S' \\ S' \kappa-\text{petit}}} T(S'))^{\#} \end{aligned} \tag{1}$$

**Remarque 2.2.** Si $T \in \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$, le foncteur $T^{\kappa\to\kappa'}$ correspond à l'extension gauche de Kan le long de l'inclusion $\mathbf{Top}_\kappa^{ed} \subset \mathbf{Top}_{\kappa'}^{ed}$.

On rappelle aussi que ce foncteur a les propriétés suivantes

i) Il est exacte;

ii) Il commute avec les colimites;

iii) Il est pleinement fidèle;

iv) Il respecte les objets réprésentables (i.e. $y(S)^{\kappa\to\kappa'} = y(i(S))$, où $i$ est l'inclusion $\mathbf{Top}_\kappa^{pf} \subset \mathbf{Top}_{\kappa'}^{pf}$.

v) Il commute avec les limites $\lambda$-petites, où $\lambda = \mathrm{cof}(\kappa)$ (pour voire ça, il suffit observer que la colimite qui définit $(-)^{\kappa\to\kappa'}$ est $\mathrm{cof}(\kappa)$-filtrée, donc il commute avec les limites $\mathrm{cof}(\kappa)$-petites).

**Remarque 2.3.** On observe que les propriétés i), ii) et iii) resent valides pour une catégorie (avec limites finies et colimites filtrées) quelconque $\mathcal{C}$ au lieu de **Set**, et la propriété v) est vrai pour une catégorie (avec limites finies et colimites filtrées) et avec un foncteur conservative d'oubli sur **Set** (e.g. $\mathbf{Ab}, \mathbf{Mod}_R, \mathbf{Rng}, \mathbf{Grp}$).

On peut donc donner deux définitions equivalents de la catégorie des ensembles condensés

**Définition 2.4.** La catégorie des ensembles condensés est une de les deux catégories equivalents

1) la colimite filtrée des catégories $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ le long de le poset filtrée de toutes cardinals fortement limites non denombrables $\kappa$, i.e.
$$\mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \coloneqq \varinjlim_{\kappa} \mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$$

2) la catégorie des foncteurs $T : (\mathbf{Top}^{ed})^{op} \to \mathbf{Set}$ t.q.
$$T(\emptyset) = * \qquad T(S_1 \sqcup S_2) \xrightarrow{\sim} T(S_1 \times S_2)$$
et $T$ est l'extension gauche de Kan le long de l'inclusion $\mathbf{Top}^{ed}_\kappa \subset \mathbf{Top}^{ed}$ pour quelque $\kappa$

La même definition s'applique à $\mathbf{Cond}(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie avec toutes colimites filtrées.

Dans ce contexte, on peut voire le problème qu'on a présenté au debut. Si on a un espace topologique $X$, n'est pas clair pourquoi
$$\underline{X} : (\mathbf{Top}^{ed})^{op} \to \mathbf{Set}$$
soit un ensemble condensé, c'est à dire il est l'extension de Kan d'un foncteur $(\mathbf{Top}^{ed}_\kappa)^{op} \to \mathbf{Set}$ pour quelque $\kappa$. En fait, ça n'est pas toujours vrai.

**Exemple 2.5.** Si $X = \{s, \eta\} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(2)})$ est l'espace de Sierpinski ($\{\eta\}$ est ouvert, $\{s\}$ n'est pas ouvert), $\underline{X} : \mathbf{Top}^{ed} \to \mathbf{Set}$ est le foncteur
$$S \mapsto \mathrm{Cont}(S, X) = \{\text{sous-ensembles fermés de } S\}$$
Donc $\underline{X}$ n'est pas l'extension gauche de Kan de sa restriction à $\mathbf{Top}^{ed}_\kappa$ (si non la topologie de chaque $S$ extrêmement discontinu serait déterminé par la topologie de ses sous-ensembles fermés $\kappa$-petites, avec $\kappa$ independent de $S$).

Cet exemple nous dit aussi que si $X$ n'est pas T1, $\underline{X}$ n'est jamais un ensemble condensé, comme dans ce cas il y a toujours un sous-espace de $X$ homeomorphe à l'espace de Sierpinski. Pour fixer la proposition 1.1 on a besoin de ce résultat, qu'on va pas prouver

**Lemme 2.6.** *1. $\underline{X}$ est un ensemble condensé si e seulement si $X$ les points de $X$ sont fermés (i.e. $X$ est un espace T1). Dans ce cas $\underline{X}$ est un ensemble condensé où le morphismes $* \to \underline{X}$ sont quasicompacts.*

*2. Si $T$ est un ensemble condensé où les morphismes $* \to T$ sont quasicompact, $T(*)_{top}$ est un espace compactement engendré où les points sont fermés.*

Donc proposition 1.1 marche si on remplace $\mathbf{Top}$ avec $\mathbf{Top}^{T1}$ e $\mathbf{Cond}_\kappa(\mathbf{Set})$ avec $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})^*$, les ensembles condensés où les morphismes $* \to T$ sont quasicompacts (pour tout $S \to T$ où $S$ profini, $* \times_T S$ a un epimorphisme $S' \twoheadrightarrow * \times_T S$).

# 3 Traduire des propriétés topologiques

On a vu que les propriétés topologiques ont un correspondence dans la catégorie $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$. On voit comment traduire propriétés comme "compact Hausdorff" ou "Hausdorff".

**Théorème 3.1.** *Considerons le foncteur $\underline{(-)} : \boldsymbol{Top}^{T1} \to \boldsymbol{Cond}(\boldsymbol{Set})$.*

*(i) Ce foncteur induit une equivalence entre $\boldsymbol{Top}^c$ et les ensembles condensés quasicompact et quasiseparés.*

*(ii) Ce foncteur induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés faiblement Hausdorff ($\boldsymbol{Top}^{cgwh}$) à la catégorie des ensembles condensés quasiseparés ($\boldsymbol{Cond}(\boldsymbol{Set})^{qs}$). La catégorie $\boldsymbol{Cond}(\boldsymbol{Set})^{qs}$ est équivalente à la catégorie des colimites filtrées des espaces compact Hausdorff, où les morphismes de transition sont immersions fermés.*

Ici être quasiseparé/quasicompact est une définition qu'on peut donner pour des faisceaux sur des sites quelconque. Dans nos cas des ensembles condensé, on a

**Définition 3.2.** Un object $T \in \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ est dit

- *quasicompact* s'il existe $S$ profini avec un epimorphisme $S \to T$.
- *quasisеparé* si pour toute couple de morphismes $S_1 \to T, S_2 \to T$, où $S_1$ et $S_2$ sont profini, le produit fibré $S_1 \times_T S_2$ est quasicompact.

On rappelle qu'un espace topologique $X$ est faiblement Hausdorff si pour tout $S$ espace compact Hausdorff avec un morphisme dans $X$, l'image est fermée (donc en particulier $X$ est T1).

**Remarque 3.3** (No preuve)**.** Les espaces topologiques de $\mathbf{Top}^{cgwh}$ sont exactement les espaces qui peuvent être écrits comme colimites filtrées (dans $\mathbf{Top}$) des espaces topologiques compact Hausdorff le long des inclusions fermées. De façon equivalente, un espace topologique est compactement engendré et faiblement Hausdorff si et seulement si il est la colimite filtrée de ses sous-espaces compact Hausdorff avec image fermée.

*Proof.* Pour (i), on observe que tout espace compact Hausdorff $X$ peut être écrit comme quotient $X = S/R$ où $S$ est un espace profini et $R \subset S \times S$ est une relation d'equivalence fermée. Donc $\underline{X} = \underline{S}/\underline{R}$ est quasicompact. En plus, pour toute couple de morphismes $S_1 \to \underline{X}$, $S_2 \to \underline{X}$, le produit fibré $S_1 \times_{\underline{X}} S_2 = \underline{S_1 \times_X S_2}$ est compact Hausdorff aussi, donc il est quasicompact. Ça nous dit que $\underline{X}$ est quasicompact quasiseparé.

Par contre, si $T$ est quasicompact et quasiseparé, il existe $S$ profini et un epimorphisme $S \twoheadrightarrow T$, et en plus $S \times_T S$ est quasicompact: donc il existe un espace profini $Z$ et un epimorphisme $Z \twoheadrightarrow S \times_T S$. Considerons maintenant l'inclusion $S \times_T S \subset S \times S$: en composant avec l'epimorphisme $Z \twoheadrightarrow S \times_T S \subset T$, on a que l'image de $S \times_T S \subset S \times S$ coïncide avec l'image de $Z \to S$, qui est un sous-espace fermé de $S$. Donc $R \coloneqq S \times_T S \subset S \times S$ est un sous-espace fermé. Donc, $R$ definit une relation d'equivalence sur $S$ et le quotient $X = S/R$ est un espace compact Hausdorff, tel que le morphisme $\underline{X} = \underline{S}/\underline{R} \to T$ soit un isomorphisme.

Pour (ii), on montre que pour tout $X$ compactement engendré et faiblement Hausdorff, $\underline{X}$ est quasiseparé si et seulement si $\underline{X}$ est quasiseparé.

Si $X \in \mathbf{Top}^{cgwh}$, $X$ est T1 donc $\underline{X}$ est un ensemble condensé. En plus, si on a $S_1 \to \underline{X}$ et $S_2 \to \underline{X}$, où $S_1, S_2$ profinis, est-ce que le produit fibré $S_1 \times_{\underline{X}} S_2 = \underline{S_1 \times_X S_2}$ est quasicompact? On peut remplacer $X$ avec l'image de $S_1 \sqcup S_2$, qui est compact Hausdorff[1]: donc $\underline{S_1 \times_X S_2}$ est quasicompact comme $S_1 \times_X S_2$ est compact Hausdorff (consequence de (i)).

En plus, on montre que si $T$ est quasiseparé, $T$ est la colimite filtrée (dans $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$) des espaces compact Hausdorff le long des immersion fermés. En effet, si $T$ est un ensemble condensé, $T$ est la limite filtré de tous les objets quasicompacts avec un morphism sur $T$, i.e.

$$T = \varinjlim_{\substack{Q \to T \\ Q qc}} Q$$

Est-ce que

$$\varinjlim_{\substack{Q \to T \\ Q qc}} Q = \varinjlim_{\substack{Q \hookrightarrow T \\ Q qc}} Q?$$

C'est suffisiant montrer que le diagramme a droit est cofinale, i.e. on a

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads] & T \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{coeq}(Q \times_T Q \rightrightarrows Q)$ est quasicompact. Comme $T$ est quasiseparé, les sous-objects $Q \subset T$ quasicompact sont aussi quasiseparé (pour chaque couple des morphismes $S_1 \to Q, S_2 \to Q$, le produit fibré $S_1 \times_Q S_2 = S_1 \times_T S_2$ est quasicompact). Donc $Q = \underline{X_i}$ où $X_1 \in \mathbf{Top}^c$ par (i), et

$$T = \varinjlim \underline{X_i}$$

est la colimite filtrée des espaces compact Hausdorff le long des immersions fermées. □

[1] En general si $X$ est faiblement Hausdorff et on a un morphisme continu $K \to X$ où $K$ est compact Hausdorff, l'image de $K$ n'est pas seulement compacte mais aussi Hausdorff.

**Remarque 3.4** (Warning)**.** On a dit que $\mathbf{Top}^{cgwh}$ est la catégorie des colimites filtrées des espaces compact Hausdorff $\lim_{\to} X_i$ le long des immersions fermées, et aussi $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})^{qs}$ est la catégorie des colimités filtrées des ensembles condensés qcqs $\lim_{\to} X_i$ ($X_i$ compact Hausdorff) le long des immersions fermées, et en plus le foncteur $\underline{(-)}$ induit $\mathbf{Top}^{cgwh} \subset \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})^{qs}$: pourquoi ça n'est pas une equivalence? Le problème est que les colimites ne sont pas toujours preservés par $\underline{(-)}$. Par exemple, si on considère $[0,1]$ et le systeme filtré des unions finies des suites convergents, on a que

$$\lim_{\to} \bigsqcup_{\text{finite}} \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow [0,1]$$

est un isomorphisme dans **Top**, mais ça n'est pas preservé par $\underline{(-)}$, donc

$$\lim_{\to} \bigsqcup_{\text{finite}} \underline{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}$$

n'est pas dans l'image essentiel de $\underline{(-)}$. Donc le problème est que dans $\mathbf{Top}^{cgwh}$ il y a un identification de plusiers colimites, qui on separe dans $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})^{cgwh}$: on peut penser que ces colimites ne sont pas bons (e.g. ne sont pas bons pour la cohomologie). Donc $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})^{qs}$ est le context adapt où travailler.

Par contre, $\underline{(-)}$ preserve beaucoup des colimites, e.g.

- "pushouts" des espace compact Hausdorff où un morphisme est une inclusion (cw complexes finis);
- unions disjoints infinies;
- les colimites comme au dessus où la famille des indexes est dénombrable.

# References


[CMM] GeoTopCPH, Dustin Clausen, and Peter Scholze. *Condensed Mathematics Masterclass, Playlist.* Youtube. 2020. URL: `https://www.youtube.com/playlist?list=PLAMniZX5MiiLXPrD4mpZ-O9oiwhev-5Uq`.

[LCM] Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics.* 2019. URL: `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`.